Cómo la geometría nos permite entender la dinámica: una introducción a los sistemas integrables

Asier López-Gordón

Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT-CSIC), Madrid

Coloquio Junior
24 de mayo de 2023

Subvencionado por las ayudas CEX2019-000904-S y PID2019-106715GB-C21
financiadas por MCIN/AEI/10.13039/501100011033

CSIC
Consejo Superior de Investigaciones Científicas

ICMAT
Instituto de Ciencias Matemáticas

Introducccción

- *Grosso modo*, un sistema completamente integrable es un sistema dinámico con n constantes del movimiento independientes y «compatibles», donde n es el número de grados de libertad.
- En tales sistemas, las ecuaciones del movimiento se pueden «resolver completamente».

Campos de vectores

- Recordemos que un campo de vectores X en una variedad M es una aplicación $X\colon M \to TM$ que a cada punto $x \in M$ le asigna un vector tangente $X(x) \in T_x M$.
- Equivalentemente, podemos entender X como una aplicación lineal $X\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ que es una derivación, i.e.

$$X(fg) = fX(g) + gX(f), \qquad \forall\ f, g \in C^\infty(M)\,.$$

Campos de vectores

- Si $(x^1, \ldots, x^n)$ son coordenadas en M y

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \,,$$

entonces una curva integral $\gamma \colon I \subseteq \mathbb{R} \to M$, $\gamma(t) = (x^i(t))$ de X está dada por

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = X^i(\gamma(t)), \qquad i = 1, \ldots, n \,. \tag{1}$$

Campos de vectores

- Si tenemos un sistema dinámico descrito por un sistema de EDOs (1), podemos interpretarlo como el flujo de un campo vectorial.
- Esto nos permite darle una interpretación geométrica a la dinámica. Algunas de las ventajas de esto son:
    1. Reescribir el campo en unas coordenadas en las que las EDOs sean triviales de resolver (el tema de esta charla).
    2. Proyectar el campo a una variedad de dimensión menor cocientando por sus simetrías.
    3. Caracterizar su estabilidad.
    4. Desarrollar métodos numéricos que preserven propiedades geométricas del sistema original (e.g. preservación del volumen).

Formas diferenciales

- Podemos definir una p-forma α en M como una aplicación antisimétrica y multilineal que a p campos de vectores $X_1, \ldots, X_p$ en M les asigna la función $\alpha(X_1, \ldots, X_p)$.
- El producto exterior de 1-formas $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ es distributivo, asociativo y antisimétrico.
- En coordenadas, una 1-forma α y una 2-forma β se escriben

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{d}x^i, \quad \beta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \,.$$

Geometría simpléctica

Definición

Sea M una variedad. Una **forma simpléctica** ω en M es una 2-forma en M tal que

1. es no degenerada: $\omega(v, \cdot) = 0 \Leftrightarrow v = 0$,
2. es cerrada: $\mathrm{d}\omega = 0$.

Al par (M, ω) se le llama **variedad simpléctica**.

Proposición

La aplicación $X \mapsto \omega(X, \cdot)$ es un isomorfismo entre el $C^\infty(M)$-módulo de los campos vectoriales y el de las 1-formas.

Geometría simpléctica

Ejemplo

- Sean $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ coordenadas canónicas en $\mathbb{R}^{2n}$
- La 2-forma ω dada por

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i$$

es simpléctica

Geometría simpléctica

Teorema (Darboux)

Alrededor de todo punto $x \in M$ de una variedad simpléctica (M, ω) existe una carta $(U; q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ tal que

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i \,.$$

*A las coordenadas $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ se las conoce como **coordenadas de Darboux**.*

Corolario

Toda variedad simpléctica tiene dimensión par.

Campo hamiltoniano

- Sea (M, ω) una variedad simpléctica.
- Dada una función $f \in C^\infty(M)$, su **campo hamiltoniano** es un campo vectorial X_f en M dado por

$$\omega(X_f, \cdot) = \mathrm{d}f \,.$$

- En coordenadas de Darboux

$$X_f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \,.$$

Campo hamiltoniano

- Una curva integral $\gamma \colon \mathbb{R} \supseteq I \ni t \mapsto \big(q(t), p(t)\big) \in M$ de X_f satisface

$$\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial p_i}(q(t), p(t)) \,,$$
$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial f}{\partial q^i}(q(t), p(t)) \,,$$

para $i = 1, \ldots, n$.

Sistema hamiltoniano

Definición

Un **sistema hamiltoniano** es un triple (M, ω, h), donde (M, ω) es una variedad simpléctica y $h \in C^\infty(M)$ es una función llamada **función hamiltoniana**.
Su dinámica viene dada por el flujo del campo hamiltoniano de h:

$$\omega(X_h, \cdot) = \mathrm{d}h$$

- Esta es la forma intrínseca (sin coordenadas) de escribir las ecuaciones de Hamilton.
- En sistemas físicos, habitualmente h se puede interpretar como la energía del sistema.

Ejemplo (Ecuaciones geodésicas)

- Sea (M, g) una variedad (pseudo)riemanniana con coordenadas (x^i).
- Consideremos el sistema hamiltoniano (T^*M, ω, h), con

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}p_i, \qquad h = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} p_i p_j \,,$$

  donde (g^{ij}) es la matriz inversa de (g_{ij}).
- Las ecuaciones de Hamilton para h son las ecuaciones geodésicas para g.

Corchete de Poisson

- El **corchete de Poisson** $\{\cdot,\cdot\}\colon C^\infty(M)\times C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ está dado por
$$\{f,g\}=\omega(X_f,X_g)\,.$$
- Notemos que
$$\{f,g\}=X_g(f)=-X_f(g)\,.$$
- En coordenadas de Darboux
$$\{f,g\}=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)\,.$$

Corchete de Poisson

- Propiedades:
  1. Bilinealidad,
  2. Antisimetría: $\{f, g\} = -\{g, f\}$,
  3. Identidad de Jacobi: $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$,
  4. Identidad de Leibniz: $\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}$.
- Las tres primeras implican (por definición) que el corchete de Poisson es un corchete de Lie en $C^\infty(M)$.
- Se cumple

$$X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]\,.$$

- Por lo tanto, la aplicación $f \mapsto X_f$ es un anti-homomorfismo de álgebras de Lie.

Subvariedades lagrangianas

Definición

Una subvariedad $N \subset M$ de una variedad simpléctica (M^{2n}, ω) se dirá **lagrangiana** si $\dim N = n$ y $\omega|_N = 0$.

Ejemplo

- Consideremos la variedad simpléctica $(\mathbb{R}^{2n}, \omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i)$.
- Podemos comprobar que

$$N = \{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid y_i = 0,\ i = 1, \ldots, n\}$$

es una subvariedad lagrangiana.

Involutividad

Definición

Una colección de funciones $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty(M)$ se dirá que está **en involución** si $\{f_i, f_j\} = 0$ para cada $i, j = 1, \ldots, n$.

Involutividad

Proposición

Sea (M, ω, h) un sistema hamiltoniano y $f \in C^{\infty}(M)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *f toma un valor constante a lo largo de cada curva integral de X_h,*
2. *$X_h(f) = 0$,*
3. *f y h están en involución, i.e. $\{f, h\} = 0$.*

*A una función que satisfaga tales condiciones la llamaremos **cantidad conservada** (o **constante del movimiento**).*

Definición

Un sistema hamiltoniano (M^{2n}, ω, h) se dirá **completamente integrable** (o **integrable Liouville**) si existen n funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C^\infty(M)$ tales que

1. $h, f_1, f_2, \ldots, f_n$ están en involución,
2. son funcionalmente independientes (i.e. $\operatorname{rank}\{\mathrm{d}f_i\} = n$) a.e.,

Las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ se dirán **integrales**.

Denotaremos $F = (f_1, \ldots, f_n)\colon M \to \mathbb{R}^n$.

Teorema (Liouville–Arnold)

Sea (M, ω, h) *un sistema completamente integrable. Sea* $M_\Lambda = F^{-1}(\Lambda)$ *un conjunto de nivel regular, i.e.* $\operatorname{rank} \mathrm{d}_x F = n$ *para todo* $x \in M_\Lambda$*. Entonces*

1. M_Λ *es una subvariedad lagrangiana de* (M, ω)*.*
2. M_Λ *es invariante bajo el flujo de* X_h *y* X_{f_i}*.*
3. *Cada componente conexa y compacta de* M_Λ *es difeomorfa a* $\mathbb{T}^n$*.*
4. *En un entorno de* M_Λ *existen coordenadas* (φ^i, s_i)*, llamadas de* ***acción-ángulo****, tales que*
   - A. $\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}\varphi^i \wedge \mathrm{d}s_i$*,*
   - B. *las coordenadas de acción* s_i *son funciones de las integrales* $f_1, \ldots, f_n$*,*
   - C. *las ecuaciones de Hamilton (curvas integrales de* X_h*) se escriben*

$$\frac{\mathrm{d}\varphi^i}{\mathrm{d}t} = \Omega^i(s_1, \ldots, s_n), \qquad \frac{\mathrm{d}s_i}{\mathrm{d}t} = 0\,.$$

Demostración de ① y ②

- Puesto que $X_{f_j} f_i = \{f_i, f_j\} = 0 \ \forall\, i, j$ y $T_x M_\Lambda = \ker\{\mathrm{d} f_i\}$, los campos X_{f_i} son tangentes a M_Λ.
- En otras palabras, los flujos de X_{f_i} dejan M_Λ invariante.
- Al ser $\mathrm{d} f_1, \ldots, \mathrm{d} f_n$ linealmente independientes y $v \mapsto \iota_v \omega$ un isomorfismo, $X_{f_1}, \ldots, X_{f_n}$ son linealmente independientes.
- Luego, $\{X_{f_1}(x), \ldots, X_{f_n}(x)\}$ es una base de $T_x M_\Lambda$ para cada $x \in M_\Lambda$.
- Usando que $\omega(X_{f_i}, X_{f_j}) = \{f_i, f_j\} = 0$ para cada i, j, concluimos que M_Λ es lagrangiana.

Esquema de la demostración de ③

Lema

Sea N una n-variedad y $X_1, \ldots, X_n$ campos vectoriales linealmente independientes y completos en N. Si estos campos conmutan entre sí, entonces N es difeomorfa a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ for some $k \leq n$. En particular, si N es compacta, entonces $N \cong \mathbb{T}^n$.

- Recordemos que X_i completo significa que su flujo $\phi_t^{X_i}$ está definido $\forall\ t \in \mathbb{R}$.
- Puesto que los campos conmutan, la composición de sus flujos también conmuta.

Esquema de la demostración de 3

- Por ello, la aplicación $\Phi\colon \mathbb{R}^n \times N \to N$ dada por

$$\Phi(t_1, \ldots, t_n)(x) = \phi_{t_1}^{X_1} \circ \cdots \circ \phi_{t_n}^{X_n}(x)\,.$$

  es una acción del grupo de Lie abeliano $\mathbb{R}^n$ sobre N.
- La aplicación $A_x\colon (t_1, \ldots, t_n) \mapsto \Phi(t_1, \ldots, t_n)(x)$ es una inmersión, i.e. $\operatorname{rank} \mathrm{d}A_x = n \;\forall\, x \in N$.
- Por ello, $O(x) = \operatorname{Im} A_x$ es un abierto de N.
- Al ser N conexo por hipótesis, $O(x) = N$.

Esquema de la demostración de 3

- Por el primer teorema de isomorfismo para grupos de Lie, $O(x) \cong G/G_x$ (isomorfos como grupos y difeomorfas como variedades), con $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.
- En este caso, $\operatorname{Im} A_x \cong \mathbb{R}^n/G_x$.
- Al ser A_x un difeomorfismo local, G_x es discreto.
- Se puede probar que G_x es un retículo $\mathbb{Z}^k$ para un cierto $k \leq n$.
- Concluimos que $N \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k \cong \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

Lema

El subgrupo de isotropía G_x de la acción $\Phi\colon \mathbb{R}^n \times N \to N$ es un retículo $\mathbb{Z}^k$ para $k \leq n$.

- En el caso $n = 1$ tomemos e_1 como el elemento más pequeño de $G_x \subseteq \mathbb{R}$ distinto de 0.
- Por reducción al absurdo podemos probar que cualquier otro elemento de G_x es múltiplo de e_1.
- En efecto, si $g \in G_x$ no fuera múltiplo de e_1 tendríamos

$$ke_1 < g < (k+1)e_1\,,$$

  para algún entero positivo k, pero entonces $e - ke_1 < e_1$.
- En el caso n, procederíamos por inducción obteniendo una base $\{e_1, \ldots, e_k\}$ de $G_x \cong \mathbb{Z}^k$.

Idea de la demostración de (4)

- Al ser $F\colon M \to \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable, para cada punto $y \in \mathbb{R}^n$, existe un entorno V tal que $F^{-1}(V)$ es difeomorfo a $V \times F^{-1}(y)$.
- Consideremos un entorno $U = V \times M_\Lambda$ de $M_\Lambda = F^{-1}(\Lambda)$ de esta forma.
- Como $M_\Lambda \cong \mathbb{T}^n$, podemos tomar coordenadas angulares del toro $(\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$
- Las integrales $f_1, \ldots, f_n$ son coordenadas en $V \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Definiendo unas nuevas funciones $s_i = s_i(f_1, \ldots f_n)$ es posible escribir

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\varphi^i \wedge \mathrm{d}s_i \,.$$

Idea de la demostración de 4

- En estas coordenadas, $\frac{\partial}{\partial \varphi^i} = X_{s_i}$, de modo que

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi^i} = X_{s_i}(h) = \{s_i(f_1, \ldots, f_n), h\} = 0\,,$$

  y tenemos $h = f(s_1, \ldots, s_n)$.
- Además,

$$X_h = \underbrace{\frac{\partial h}{\partial s_i}}_{\Omega^i} \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\,,$$

  donde las frecuencias Ω^i dependen únicamente de las coordenadas acción (s_i).

Ejemplo: el oscilador armónico n-dimensional

- Consideremos el sistema hamiltoniano $(\mathbb{R}^{2n}, \omega, h)$, donde

$$h = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i^2}{2} + \frac{x_i^2}{2} \right), \qquad \omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}p_i \,.$$

- Es completamente integrable. En efecto, las funciones

$$f_i = \frac{p_i^2}{2} + \frac{x_i^2}{2}$$

son integrales, i.e. $\{f_i, h\} = 0$ y $\operatorname{rank}\{\mathrm{d}f_i\} = n$ a.e.

- Los conjuntos de nivel M_Λ están dados por

$$M_\Lambda = \left\{ (x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \underbrace{p_i^2 + x_i^2 = 2\Lambda_i}_{\text{círculos}} \right\} \cong \mathbb{T}^n \,.$$

Ejemplo: el oscilador armónico n-dimensional

- Podemos escribir el hamiltoniano como

$$h = h(f_1, \dots, f_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i \,.$$

- Sea $\varphi^i = \arctan\left(\frac{x_i}{p_i}\right)$. Entonces,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\varphi^i \wedge \mathrm{d}f_i \,.$$

- Vemos que (φ^i, f_i) son coordenadas de acción-ángulo.

Ejemplo: el oscilador armónico n-dimensional

- Los campos hamiltonianos están dados por

$$X_{f_i} = \frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \quad X_h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \varphi^i}.$$

- Las ecuaciones de Hamilton se escriben

$$\frac{\mathrm{d}\varphi^i}{\mathrm{d}t} = 1,$$
$$\frac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}t} = 0.$$

- Su solución es inmediata:

$$\varphi^i(t) = \varphi^i(0) + t, \qquad f_i = c_i = \mathrm{const.}$$

[1] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Graduate Texts in Mathematics). New York: Springer-Verlag, 1978.

[2] M. Audin, *Torus Actions on Symplectic Manifolds*. Basel: Birkhäuser Basel, 2004.

[3] A. V. Bolsinov y A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian Systems: Geometry, Topology, Classification*. Boca Raton, Fla: Chapman & Hall/CRC, 2004, 730 págs.

[4] E. Fiorani, G. Giachetta y G. Sardanashvily, "An Extension of the Liouville-Arnold Theorem for the Non-Compact Case," *Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis. B*, vol. 118, n.º 3, págs. 307-317, 2003.

[5] E. Fiorani, G. Giachetta y G. Sardanashvily, "The Liouville–Arnold–Nekhoroshev theorem for non-compact invariant manifolds," *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 36, n.º 7, pág. L101, feb. de 2003.

[6] A. Kiesenhofer, E. Miranda y G. Scott, "Action-angle variables and a KAM theorem for b-Poisson manifolds," *J. Math. Pures Appl.*, vol. 105, n.º 1, págs. 66-85, 1 de ene. de 2016.

[7] J. Liouville, "Note sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique," *J. Math. Pures Appl.*, págs. 137-138, 1855.

[8] E. Miranda, "Integrable systems and group actions," *Open Mathematics*, vol. 12, n.º 2, págs. 240-270, 1 de feb. de 2014.

[9] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (Texts in Applied Mathematics 2), 2nd ed. New York: Springer, 2003, 843 págs.

¡Muchas gracias!

✉ asier.lopez@icmat.es

🌐 www.alopezgordon.xyz