Jednorodne rozmaitości symplektyczne i całkowalne układy kontaktowe

Asier López-Gordón

Wspólna praca z L. Colombo, M. de Leónem, M. E. Eyreą Irazú i M. Lainzem

Seminarium Instytutu Matematyki
Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego

INSTYTUT MATEMATYCZNY
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Motywacja

- Geometria różniczkowa pomaga lepiej rozumieć układy dynamiczne, zarówno jakościowo, jak i ilościowo: symetrie, stabilność, metody numeryczne itp.
- Aby modelować niektóre niezachowawcze układy fizyczne, można użyć geometrii kontaktowej.
- Chcielibyśmy znaleźć współrzędne takie, że równania dynamiki i struktura geometryczna mają postać kanoniczną.

Plan prezentacji

1. Przegląd geometrii symplektycznej i twierdzenia Liouville'a–Arnolda
2. Układy hamiltonowskie kontaktowe i całkowalne układy kontaktowe
3. Słownik kontaktowo – jednorodny symplektyczny
4. Układy bihamiltonowskie

Geometria symplektyczna

- Rozmaitości symplektyczne są naturalnymi przestrzeniami dla mechaniki Hamiltona.
- Niech M będzie rozmaitością różniczkowalną. Dwuforma ω na M nazywa się **formą symplektyczną**, jeżeli jest zamknięta i niezdegenerowana, czyli $\mathrm{d}\omega = 0$ i

$$\mathrm{T}M \ni v \mapsto \omega(v, \cdot) \in \mathrm{T}^*M$$

jest izomorfizmem między wiązkami wektorowymi.
- Para (M, ω) nazywa się **rozmaitością symplektyczną**.
- Warunek niedegeneracji implikuje, że M ma wymiar parzysty.
- Dla dowolnej funkcji $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, jej **pole hamiltonowskie** jest jednoznacznym polem wektorowym X_f na M takim, że

$$\omega(X_f, \cdot) = \mathrm{d}f\,.$$

Geometria symplektyczna

- Każdy punkt w M ma otoczenie ze **współrzędnymi Darboux'a** (q^i, p_i), gdzie

$$\omega = \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i \,, \quad X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} \,, \quad 1 \leq i \leq n \,.$$

Geometria symplektyczna

Przykład (Wiązka kostyczna)

- Niech N będzie dowolną rozmaitością.
- Jej wiązka kostyczna T^*N jest naturalnie wyposażona w jednoformę kanoniczną θ_N.
- Ponadto $\omega_N = -\mathrm{d}\theta_N$ jest symplektyczna.
- Niech (x^i) będą współrzędnymi na N, które definiują współrzędne wiązkowe (x^i, α_i) na T^*N.
- Wówczas,

$$\theta_N = \alpha_i \,\mathrm{d}x^i \,, \quad \omega_N = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}\alpha_i \,.$$

Równania Hamiltona

- Niech (M, ω) będzie rozmaitością symplektyczną. **Funkcja Hamiltona** jest pewną funkcją H na M, która fizycznie reprezentuje energię układu mechanicznego.
- Trójka (M, ω, H) nazywa się **układem hamiltonowskim**.
- Trajektorie układu są krzywymi całkowymi X_H. We współrzędnych Darboux'a spełniają **równania Hamiltona**:

$$\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Równania Hamiltona

- Dynamika Hamiltona zachowuje formę symplektyczną oraz funkcję Hamiltona, tzn.

$$\mathcal{L}_{X_H} H = 0\,, \quad \mathcal{L}_{X_H} \omega = 0\,.$$

- Innymi słowy, jeżeli $\gamma \colon I \subseteq \mathbb{R} \to M$ jest rozwiązaniem równań Hamiltona, to

$$H \circ \gamma(t) = H \circ \gamma(t_0)\,, \quad \omega_{\gamma(t)} = \omega_{\gamma(t_0)}\,, \quad \forall t_0, t \in I\,.$$

Nawias Poissona

Definicja

Niech M będzie rozmaitością. Operacja $\{\cdot,\cdot\}\colon \mathscr{C}^\infty(M) \times \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$ nazywa się **nawiasem Poissona**, jeżeli

- jest nawiasem Liego na $\mathscr{C}^\infty(M)$ –jest dwuliniowy, antysymetryczny i spełnia tożsamość Jacobiego,
- spełnia regułę Leibniza:

$$\{f, g\cdot h\} = \{f, g\}\cdot h + \{f, h\}\cdot g\,, \quad \forall\, f, g, h \in \mathscr{C}^\infty(M)\,.$$

Nawias Poissona

Stwierdzenie

Forma symplektyczna ω definiuje nawias Poissona

$$\{f, g\}_\omega := \omega(X_f, X_g) = X_g(f)\,.$$

Ponadto spełnia warunek

$$X_{\{f,g\}_\omega} = -[X_f, X_g]\,, \quad \forall\, f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)\,.$$

Zatem odwzorowanie $f \mapsto X_f$ jest antyizomorfizmem algebr Liego.

Stwierdzenie

Niech (M, ω, H) będzie układem hamiltonowskim. Dla dowolnej funkcji $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ następujące warunki są równoważne:

1. $X_H(f) = 0$,
2. $\{f, H\}_\omega = 0$,
3. *Wartość f jest stała na krzywych całkowych X_H.*

Wówczas f nazywa się ***stałą ruchu****.*

Twierdzenie (Liouville–Arnold)

Niech $f_1, \ldots, f_n$ *będą funkcjami na rozmaitości symplektycznej* (M^{2n}, ω) *takimi, że*

$$\{f_i, f_j\}_\omega = 0\,, \quad 1 \leq i, j \leq n\,,$$

i $\mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_n$ *są liniowo niezależne. Rozważmy poziomicę* $M_\Lambda = \{x \in M \mid f_i = \Lambda_i\}$, $\Lambda_i \in \mathbb{R}$. *Wówczas:*

1. *Każda zwarta składowa spójna* M_Λ *jest dyfeomorficzna z* $\mathbb{T}^n$.
2. *W otoczeniu* $U \supseteq M_\Lambda$ *istnieją* ***współrzędne działanie-kąt*** (φ^i, J_i) *takie, że*

   $$\omega = \mathrm{d}\varphi^i \wedge \mathrm{d}J_i\,,$$

   i $f_i = f_i(J_1, \ldots, J_n)$. *Zatem pola hamiltonowskie mają wyrażenia*

   $$X_{f_i} = \frac{\partial f_i}{\partial J_j} \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\,.$$

Wniosek

Załóżmy jak wyżej. Niech (M, ω, H) *będzie układem hamiltonowskim. Jeżeli* $f_1, \ldots, f_n$ *są stałymi ruchu, to równania Hamiltona mają wyrażenie*

$$\frac{\mathrm{d}\varphi^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial J_i}\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}J_i}{\mathrm{d}t} = 0\,.$$

Definicja

Będziemy nazywać $(M, \omega, f_1, \ldots, f_n)$ **układem całkowalnym**.

Uwaga

Fiorani, Giachetta i Sardanashvily (2002) uogólnili twierdzenie Liouville'a–Arnolda dla niezwartej podrozmaitości M_Λ. W tym przypadku, musimy założyć, że $X_{f_1}, \ldots, X_{f_n}$ są zupełne.

Układy hamiltonowskie kontaktowe

Stwierdzenie

Niech α będzie jednoformą na rozmaitości M. Następujące zdania są równoważne:

1. $\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^n$ *jest formą objętości na* M,
2. $\flat_\alpha \colon \mathrm{T}M \ni v \mapsto \alpha(v)\alpha + \iota_v \mathrm{d}\alpha \in \mathrm{T}^*M$ *jest izomorfizmem,*
3. $\mathrm{T}M = \ker \alpha \oplus \ker \mathrm{d}\alpha$,
4. $\omega = \mathrm{d}(r\alpha)$ *jest formą symplektyczną na* $M \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

W szczególności $\dim M = 2n + 1$.
Dodatkowo zauważmy, że α *spełnia warunki w.t.w. gdy* $\tilde{\alpha} = f\alpha$ *spełnia warunki dla dowolnej niezerowej* $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$.

Definicja

Jeżeli jednoforma α spełnia warunki na górze, to nazywa się **formą kontaktową** i (M, α) nazywa się **rozmaitością kontaktową**.

Definicja

Istnieje ogólniejsza definicja rozmaitości kontaktowej –jako rozmaitość wyposażona w dystrybucję maksymalnie niecałkowalną. Innymi słowy możemy rozważać formy kontaktowe, które nie są globalnie zdefiniowane.

Przykład

Rozważmy wiązkę kostyczną T^*M z formą kanoniczną $\theta_M = p_i \mathrm{d}q^i$. W wiązce trywialnej $\pi_1 : \mathrm{T}^*M \times \mathbb{R} \to \mathrm{T}^*M$ jest forma kontaktowa

$$\alpha_M = \mathrm{d}r - \pi_1^* \theta_M = \mathrm{d}r - p_i \mathrm{d}q^i \,,$$

gdzie r jest współrzędną kanoniczną w $\mathbb{R}$.

Pole Reeba

Definicja

Niech (M, α) będzie rozmaitością kontaktową. **Pole Reeba** jest jednoznacznym polem wektorowym $\mathcal{R}$ na M takim, że $\flat_\alpha(\mathcal{R}) = \alpha$. Równoważnie

$$\mathcal{R} \in \ker \mathrm{d}\alpha\,, \qquad \alpha(\mathcal{R}) = 1\,.$$

Pola hamiltonowskie kontaktowe

Definicja

Niech (M, α) będzie rozmaitością kontaktową. Dla dowolnej funkcji $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, jej **pole hamiltonowskie kontaktowe** jest jednoznacznym polem wektorowym X_f na M takim, że

$$\flat_\alpha(X_f) = \mathrm{d}f - (\mathcal{R}(f) + f)\,\alpha\,.$$

Równoważnie

$$\alpha(X_f) = -f\,, \quad \mathcal{L}_{X_f}\alpha = -\mathcal{R}(f)\,\alpha\,.$$

Stwierdzenie

Niech (M, α) *będzie rozmaitością kontaktową. Dla dowolnej niezerowej funkcji* $\sigma \in \mathscr{C}^\infty(M)$*, jednoforma* $\tilde{\alpha} = \sigma\alpha$ *jest formą kontaktową. Ponadto, dla każdej funkcji* $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$*, pole hamiltonowskie kontaktowe funkcji* f *względem* α *równa się polu hamiltonowskiemu kontaktowemu funkcji* σf *względem* $\tilde{\alpha}$*, czyli*

$$X_f^\alpha = X_{\sigma f}^{\tilde{\alpha}}\,.$$

Definicja

Mówimy, że $\tilde{\alpha} = \sigma\alpha$ jest **konforemna** do α.

Twierdzenie (Darboux)

Niech (M, α) *będzie rozmaitością kontaktową. Każdy punkt w M ma otoczenie ze* ***współrzędnymi Darboux'a*** (q^i, p_i, z)*, gdzie*

$$\alpha = \mathrm{d}z - p_i \mathrm{d}q^i \,.$$

Zatem

$$\mathcal{R} = \frac{\partial}{\partial z}\,,$$

i

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial p_i} + \left(p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} - f\right)\frac{\partial}{\partial z}\,, \quad \forall f \in \mathscr{C}^\infty(M)\,.$$

Struktura Jacobiego związana z formą kontaktową

- Forma kontaktowa α na M definiuje **nawias Jacobiego**

$$
\begin{aligned}
&\{\cdot,\cdot\}_\alpha \colon \mathscr{C}^\infty(M) \times \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathscr{C}^\infty(M) \\
&\{f,g\}_\alpha = X_f(g) + g\mathcal{R}(f) = -\alpha\big([X_f,X_g]\big)\,.
\end{aligned}
$$

- Nawias Jacobiego jest nawiasem Liego, ale nie spełnia reguły Leibniza.
- Natomiast spełnia „uogólnioną regułę Leibniza”:

$$
\{f,g\cdot h\}_\alpha = \{f,g\}_\alpha \cdot h + \{f,h\}_\alpha \cdot g - gh\mathcal{R}(f)\,, \quad \forall\, f,g,h \in \mathscr{C}^\infty(M)\,.
$$

- Odwzorowanie $f \mapsto X_f$, z odwrotnym $X \mapsto -\alpha(X)$, jest antyizomorfizmem algebr Liego między $(\mathscr{C}^\infty(M), \{\cdot,\cdot\}_\alpha)$ i algebrą pól hamiltonowskich kontaktowych z $[\cdot,\cdot]$.

Układy hamiltonowskie kontaktowe

Definicja

Niech (M, α) będzie rozmaitością kontaktową i $H \in \mathscr{C}^\infty(M)$. Trójka (M, α, H) nazywa się **układem hamiltonowskim kontaktowym**.

- Trajektorie układu są krzywymi całkowymi X_H. We współrzędnych Darboux'a spełniają **równania Hamiltona kontaktowe**:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}q^i(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \circ c(t)\,, \\
\frac{\mathrm{d}p_i(t)}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} \circ c(t) - p_i(t)\frac{\partial H}{\partial z} \circ c(t)\,, \\
\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} &= p_i(t)\frac{\partial H}{\partial p_i} \circ c(t) - H \circ c(t)\,.
\end{aligned}
$$

Uwaga

Dynamika kontaktowa nie jest zachowawcza, czyli

$$\mathcal{L}_{X_H} H = -\mathcal{R}(H)\, H\,, \quad \mathcal{L}_{X_H} \alpha = -\mathcal{R}(H)\, \alpha\,.$$

Niektóre układy fizyczne z dyssypacją można reprezentować jako układy hamiltonowskie kontaktowe.

Przykład (Oscylator harmoniczny z dyssypacją liniową)

Rozważmy rozwiązanie $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ równania różniczkowego drugiego rzędu

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -x(t) - \kappa \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\,,$$

gdzie $\kappa \in \mathbb{R}$. Oznaczmy $p = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, aby redukować rozwiązanie do

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = p(t)\,, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(t) = -x(t) - \kappa p(t)\,.$$

To są pierwsze dwa równania Hamiltona kontaktowe z $(\mathbb{R}^3, \alpha, H)$, gdzie $\alpha = \mathrm{d}z - p\mathrm{d}x$ i

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \kappa z\,.$$

Dla dowolnej trajektorii $\gamma(t)$, mamy

$$H \circ \gamma(t) = e^{-\kappa t}\, H \circ \gamma(0)\,.$$

Definicja

Całkowalnym układem kontaktowym nazywamy trójkę (M, α, F), gdzie (M^{2n+1}, α) jest rozmaitością kontaktową i $F = (f_0, \ldots, f_n)\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ jest odwzorowaniem takim, że

1. $\{f_\alpha, f_\beta\} = 0\,, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq n,$
2. $\operatorname{rank} \mathrm{T}F \geq n$ na zbiorze gęstym $M_0 \subseteq M$.

Notacja

- Dla $\Lambda \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, oznaczmy przez $\langle \Lambda \rangle_+$ półprostą wygenerowaną przez Λ, czyli

$$\langle \Lambda \rangle_+ := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \exists r \in \mathbb{R}_+ : x = r\Lambda \right\} .$$

- Niech $M_{\langle \Lambda \rangle_+}$ oznaczy przeciwobraz $\langle \Lambda \rangle_+$ przez $F \colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$, tzn.

$$M_{\langle \Lambda \rangle_+} := F^{-1}\left(\langle \Lambda \rangle_+ \right) .$$

Twierdzenie (Colombo, de León, Lainz i L. G., 2025 r.)

Niech $\left(M, \alpha, F\right)$ będzie całkowalnym układem kontaktowym, gdzie $F = (f_0, \ldots, f_n)$. Załóżmy, że pola hamiltonowskie kontaktowe X_{f_i} są zupełne. Dla dowolnego $\Lambda \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, istnieje otoczenie $U \supset M_{\langle\Lambda\rangle_+}$ w M takie, że:

1. *$M_{\langle\Lambda\rangle_+}$ jest dyfeomorficzne z $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n+1-k}$*
2. *X_{f_i} są styczne do $M_{\langle\Lambda\rangle_+}$.*
3. *Istnieją współrzędne $(y^0, \ldots, y^n, \tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n)$ na U takie, że*

$$X_{f_\alpha} = \overline{N}_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta},$$

   gdzie $\overline{N}_\alpha^\beta$ są funkcjami w zmiennych $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n$.

4. *Istnieje niezerowa funkcja $A_0 \in \mathscr{C}^\infty(U)$ i konforemna forma kontaktowa $\tilde{\alpha} = \alpha / A_0 = \mathrm{d}y^0 - \tilde{A}_i \mathrm{d}y^i$.*

Przykład

- Rozważmy całkowalny układ kontaktowy $(\mathbb{R}^3, \alpha, F)$, gdzie $\alpha = \mathrm{d}z - p\mathrm{d}q$ i $F(q,p,z) = (p,z)$.
- Pola hamiltonowskie we współrzędnych kanonicznych to

$$X_z = -p\partial_p - z\partial_z$$

- Współrzędne działanie-kąt to

$$y^0 = q\,, \quad y^1 = -\log z\,, \quad \tilde{A} = -\frac{p}{z}\,.$$

- W tych współrzędnych

$$X_p = \partial_{y^0}\,, \quad X_z = \partial_{y^1}\,,$$

które także są hamiltonowskie względem konforemnej lokalnej formy kontaktowej $\hat{\alpha} = -\frac{1}{z}\alpha = \mathrm{d}y^1 - \tilde{A}\mathrm{d}y^0$

Przykład

- Zatem krzywe całkowe X_z mają postać

$$y^0(t) = y^0(0)\,, \quad y^1(t) = y^1(0) + t\,, \quad \tilde{A}(t) = \tilde{A}(0)\,.$$

Jednorodne rozmaitości symplektyczne

Jednorodne rozmaitości symplektyczne

Definicja

Jednorodną rozmaitością symplektyczną nazywamy parę (M, θ), taką, że θ jest **potencjałem symplektycznym**, tzn. że $\omega = -\mathrm{d}\theta$ jest formą symplektyczną na M.

Polem Liouville'a nazywamy pole wektorowe $\Delta \in \mathfrak{X}(M)$ zdefiniowane przez

$$\iota_\Delta \omega = -\theta\,.$$

Mówimy, że pole tensorowe A na M jest k-jednorodne (gdzie $k \in \mathbb{R}$), jeżeli

$$\mathcal{L}_\Delta A = kA\,.$$

Słownik kontaktowo – jednorodny symplektyczny

Stwierdzenie

Niech (M, α) *będzie rozmaitością kontaktową. Rozważmy trywialną wiązkę wektorową* $\pi_1 : M \times \mathbb{R}_+ \to M$, $\pi_1(x, r) = x$. *Wówczas* $\theta(x, r) = r\alpha(x)$ *jest potencjałem symplektycznym na* $M \times \mathbb{R}_+$.

Definicja

Parę $(M^{\mathrm{symp}} = M \times \mathbb{R}_+, \theta = r\alpha)$ nazywamy **symplektyzacją** (M, α).

Słownik kontaktowo – jednorodny symplektyczny

Stwierdzenie

Istnieje odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna między funkcjami $f(x)$ na M a 1-jednorodnymi funkcjami $f^{\mathrm{symp}}(x, r) = -rf(x)$ na M^{symp} taka, że pole hamiltonowskie symplektyczne $X_{f^{\mathrm{symp}}}$ i kontaktowe X_f mają następującą relację:

$$\mathrm{T}\pi_1 \left(X_{f^{\mathrm{symp}}} \right) = X_f \, .$$

Ponadto nawiasy Poissona $\{\cdot, \cdot\}_\theta$ i Jacobiego $\{\cdot, \cdot\}_\alpha$ mają następującą relację:

$$\{f^{\mathrm{symp}}, g^{\mathrm{symp}}\}_\theta = \left(\{f, g\}_\alpha \right)^{\mathrm{symp}} \, .$$

Jednorodny układ całkowalny

Definicja

Jednorodnym układem całkowalnym nazywamy trójkę (M, θ, F), gdzie (M, θ) jest jednorodną rozmaitością symplektyczną i $F = (f_1, \ldots, f_n)\colon M \to \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem takim, że

- $\operatorname{rank} \mathrm{T}F = n$ na zbiorze gęstym $M_0 \subseteq M$,
- $\{f_i, f_j\} = 0\,,\ 1 \leq i, j \leq n$,
- Funkcje $f_1, \ldots, f_n$ są 1-jednorodne, tzn. że $\Delta f_i = f_i$.

Jednorodny układ całkowalny

Stwierdzenie

Niech (M, α) będzie rozmaitością kontaktową i niech $F\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ będzie gładkim odwzorowaniem. Wówczas $(M^{\mathrm{symp}}, \theta, F^{\mathrm{symp}} = -rF)$ jest jednorodnym układem całkowalnym w.t.w. gdy (M, α, F) jest całkowalnym układem kontaktowym.

Uwaga

- Niech (M, θ) będzie jednorodną rozmaitością symplektyczną.
- Zauważmy, że współrzędne (q^i, p_i) mogą być kanoniczne dla $\omega = -\mathrm{d}\theta$, ale nie dla θ i Δ.
- W szczególności standardowe twierdzenie Liouville'a–Arnolda nie gwarantuje, że zmienne działanie-kąt będą jednorodne.

Przykład

- Rozważmy $\theta = p\mathrm{d}q$ na $\mathbb{R}^2$.
- Wówczas,

$$\omega = -\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p\,, \quad \Delta = p\partial_p\,.$$

- We współrzędnych $\tilde{q} = q$, $\tilde{p} = p + e^q$ mamy $\omega = \mathrm{d}\tilde{q} \wedge \mathrm{d}\tilde{p}$, ale

$$\theta = (\tilde{p} - e^{\tilde{q}})\mathrm{d}\tilde{q}\,, \quad \Delta = \left(\tilde{p} - e^{\tilde{q}}\right) \frac{\partial}{\partial \tilde{p}}\,.$$

Jednorodne twierdzenie Liouville'a–Arnolda

Twierdzenie (Colombo, de León, Lainz i L. G., 2025 r.)

Niech (M, θ, F) *będzie jednorodnym układem całkowalnym, gdzie* $F = (f_1, \ldots, f_n)$*. Załóżmy, że* $M_\Lambda = F^{-1}(\Lambda)$ *jest spójny, gdzie* $\Lambda \in \mathbb{R}^n$*. Jeżeli istnieje otoczenie* $U \supset M_\Lambda$ *w* M *takie, że pola hamiltonowskie* $X_{f_i}\big|_U$ *są zupełne i* $\operatorname{rank} \mathrm{T}F|_U = n$*, to* $U \simeq \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \times F(U)$ *i istnieje układ współrzędnych* $(\hat{U} \subseteq U; y^i, A_i)$ *na* M *taki, że*

1. $A_i = M_i^j f_j$*, gdzie* M_i^j *są* 0*-jednorodnymi funkcjami w zmiennych* $f_1, \ldots, f_n$*,*
2. $\theta = A_i \mathrm{d}y^i$*,*
3. $X_{f_i} = N_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}$*, gdzie* (N_i^j) *jest macierzą odwrotną do* (M_i^j)*.*

Przykład

- Rozważmy formę kontaktową $\alpha = \mathrm{d}z - p\mathrm{d}q$ na $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
- Funkcje $f = z$ i $h = p$ spełniają $\{f, h\}_\alpha = 0$ oraz $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}h \neq 0$.
- Z tego wynika, że (M, α, F) jest całkowalnym układem kontaktowym, gdzie $F = (h, f)\colon M \to \mathbb{R}^2$.
- Symplektyzacją jest $(M^{\mathrm{symp}}, \theta, F^{\mathrm{symp}})$, gdzie

$$M^{\mathrm{symp}} = M \times \mathbb{R}_+ , \quad \theta = r\mathrm{d}z - rp\mathrm{d}q , \quad F^{\mathrm{symp}} = (-rz, -rp) .$$

- Odpowiednie pola hamiltonowskie to

$$X_{h^{\mathrm{symp}}} = \frac{\partial}{\partial q} , \quad X_{f^{\mathrm{symp}}} = -p\frac{\partial}{\partial p} - z\frac{\partial}{\partial z} + r\frac{\partial}{\partial r} .$$

Przykład

- Jednorodne współrzędne działanie-kąt to

$$
\begin{aligned}
y^0_{\mathrm{symp}} &= q\,, & y^1_{\mathrm{symp}} &= -\log z\,,\\
A_0^{\mathrm{symp}} &= h^{\mathrm{symp}} = -rp\,, & A_1^{\mathrm{symp}} &= f^{\mathrm{symp}} = -rz\,.
\end{aligned}
$$

- W tych współrzędnych

$$
X_{h^{\mathrm{symp}}} = \frac{\partial}{\partial y^0_{\mathrm{symp}}}\,, \quad X_{f^{\mathrm{symp}}} = \frac{\partial}{\partial y^1_{\mathrm{symp}}}\,.
$$

Przykład

- Rzutując do M, otrzymujemy funkcje

$$y^0 = q\,, \quad y^1 = -\log z\,, \quad A_0 = h = p\,, \quad A_1 = f = z\,.$$

- Współrzędnymi kąt są y^0, y^1 a współrzędną działania jest

$$\tilde{A} = -\frac{A_0}{A_1} = -\frac{p}{z}\,.$$

- W tych współrzędnych

$$X_h = \frac{\partial}{\partial y^0}\,, \quad X_f = \frac{\partial}{\partial y^1}\,,$$

które także są hamiltonowskie względem konforemnej formy kontaktowej

$$\hat{\alpha} = -\frac{1}{A_1}\alpha = \mathrm{d}y^1 - \tilde{A}\mathrm{d}y^0\,.$$

Układy bihamiltonowskie

Układy bihamiltonowskie

Problem

Dla danego układu hamiltonowskiego (M, ω, H)*, chcielibyśmy znaleźć n niezależnych stałych ruchu takich, że* $\{f_i, f_j\}_\omega = 0$*, aby obliczyć współrzędne działanie-kąt.*

Aby znaleźć te stałe ruchu, Magri *et al.* opracowali metodę taką, że f_i są wartościami własnymi endomorfizmu $N\colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}M$.

Struktury Poissona

- Niech $\{\cdot, \cdot\}$ będzie nawiasem Poissona na $\mathscr{C}^\infty(M)$.
- Definiuje tensor antysymetryczny (pole dwuwektorowe) Λ przez

$$\Lambda(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g) = \{f, g\}, \quad f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)\,.$$

- Poza tym definiuje odwzorowanie

$$\sharp_\Lambda \colon \mathrm{T}^*M \to \mathrm{T}M\,, \quad \sharp_\Lambda(\alpha) = \Lambda(\cdot, \alpha)\,.$$

Zgodność struktur Poissona

Definicja

Niech Λ_1 i Λ_2 będą tensorami Poissona na rozmaitości M. Mówimy, że one są **zgodne**, jeżeli $\Lambda_1 + \Lambda_2$ także jest tensorem Poissona.

Innymi słowy mówimy, że nawiasy Poissona $\{\cdot,\cdot\}_1$ i $\{\cdot,\cdot\}_2$ na $\mathscr{C}^\infty(M)$ są **zgodne**, jeżeli

$$\{f,g\} = \{f,g\}_1 + \{f,g\}_2\,, \quad \forall\, f,g \in \mathscr{C}^\infty(M)$$

jest nawiasem Poissona.

Zgodność struktur Poissona

Definicja

Pole wektorowe X na M nazywa się **bihamiltonowskim**, jeżeli jest ono hamiltonowskie względem dwóch zgodnych struktur Poissona, czyli istnieją funkcje h_1, h_2 na M takie, że

$$X = \{\cdot, h_1\}_1 = \{\cdot, h_2\}_2 \,.$$

Struktury Poissona – Nijenhuisa

- Forma symplektyczna ω na M definiuje izomorfizm

$$\flat_\omega \colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}^*M\,, \quad \flat_\omega(v) = \omega(v, \cdot)\,.$$

- Wówczas odwzorowanie $\sharp_{\Lambda_\omega}$ zdefiniowane przez odpowiednią strukturę Poissona Λ_ω jest odwrotnym $\flat_\omega$:

$$\sharp_{\Lambda_\omega} = \flat_\omega^{-1} \colon \mathrm{T}^*M \to \mathrm{T}M\,.$$

- Jeżeli Λ_1 jest inną strukturą Poissona na M, to możemy zdefiniować tensor

$$N = \sharp_{\Lambda_1} \circ \sharp_{\Lambda_\omega}^{-1} = \sharp_{\Lambda_1} \circ \flat_\omega\,.$$

- Para (Λ_ω, N) nazywa się **strukturą Poissona – Nijenhuisa**.

Struktury Poissona – Nijenhuisa

Twierdzenie (Magri i Morosi, 1984 r.)

Niech (M, ω) *będzie rozmaitością symplektyczną i niech* Λ_1 *będzie tensorem Poissona. Niech* λ_i *oznaczają wartości własne tensora* $N = \sharp_{\Lambda_1} \circ \flat_\omega$. *Jeżeli* Λ_ω *i* Λ_1 *są zgodnymi tensorami Poissona, to*

$$\{\lambda_i, \lambda_j\}_\omega = 0\,, \quad \{\lambda_i, \lambda_j\}_1 = 0\,, \quad \forall\, i, j\,.$$

Wniosek

Jeśli pole wektorowe X *na* M *jest bihamiltonowskie względem* ω *i* Λ_1, *to* λ_i *są stałymi ruchu, czyli*

$$X(\lambda_i) = 0\,.$$

Przykład

- Rozważmy $T^*\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ z kanoniczną formą symplektyczną $\omega_M = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}p_i$, która definiuje strukturę Poissona

$$\Lambda_\omega = \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \wedge \frac{\partial}{\partial p_2} .$$

- Zgodna struktura Poissona to

$$\Lambda_1 = p_1 \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial p_1} + p_2 x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \wedge \frac{\partial}{\partial p_2} .$$

- Tensor $N = \sharp_{\Lambda_1} \circ \sharp_\Lambda^{-1}$ ma postać

$$N = p_1 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \mathrm{d}x^1 + \frac{\partial}{\partial p_1} \otimes \mathrm{d}p_1 \right) + p_2 x^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \mathrm{d}x^2 + \frac{\partial}{\partial p_2} \otimes \mathrm{d}p_2 \right) ,$$

Przykład

- lub jako macierz

$$N = \begin{pmatrix} p_1 & & & \\ & x^2 p_2 & & \\ & & p_1 & \\ & & & x^2 p_2 \end{pmatrix}$$

- Jego wartościami własnymi są $\lambda_1 = p_1$ i $\lambda_2 = p_2 x^2$.
- Pole wektorowe

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} - p_2 \frac{\partial}{\partial p_2}$$

  jest bihamiltonowskie. Ma ono funkcje Hamiltona $H = p_1 + p_2 x^2$ i $H_1 = \log(p_1 p_2 x^2)$ względem Λ i Λ_1 odpowiednio.
- Stałymi ruchu X są λ_1 i λ_2.

Struktury Jacobiego

Definicja

Niech M będzie rozmaitością. Operacja $\{\cdot,\cdot\}\colon \mathscr{C}^\infty(M)\times\mathscr{C}^\infty(M)\to\mathscr{C}^\infty(M)$ nazywa się **nawiasem Jacobiego**, jeżeli

- jest nawiasem Liego na $\mathscr{C}^\infty(M)$ –jest dwuliniowy, antysymetryczny i spełnia tożsamość Jacobiego,
- istnieje pole dwuwektorowe Λ i pole wektorowe E na M takie, że

$$\{f,g\} = \Lambda(\mathrm{d}f,\mathrm{d}g) + fE(g) - gE(f)\,,\quad \forall\, f,g\in\mathscr{C}^\infty(M)\,.$$

Zgodne struktury Jacobiego

- W latach 90 Iglesias, Monterde, Marrero, Nunes da Costa, Padrón i Petalidou opracowali teorię zgodnych struktur Jacobiego.
- Każda struktura Jacobiego (Λ, E) na rozmaitości M definiuje jednorodną strukturę Poissona Λ^{Poisson} na $M \times \mathbb{R}_+$.
- (Λ_1, E_1) i (Λ_2, E_2) są zgodne w.t.w. gdy $\Lambda_1^{\text{Poisson}}$ i $\Lambda_2^{\text{Poisson}}$ są zgodne.
- Myślelibyśmy naiwnie, że dla danego układu hamiltonowskiego kontaktowego (M, α, h) można użyć zgodnej struktury Jacobiego, aby obliczyć niezależne funkcje f_i takie, że $\{f_i, f_j\}_\alpha = 0$.
- Natomiast to nie jest możliwe.

Twierdzenie (Fernandes, 1994 r.)

Niech $(M, \omega, f_1, \dots, f_n)$ będzie układem całkowalnym ze współrzędnymi działanie-kąt (s_i, φ^i). Rozważmy funkcję Hamiltona taką, że

(SR) *$f_1, \dots, f_n$ są stałymi ruchu.*

(ND) *Macierz Hessego $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial s_i \partial s_j}\right)$ względem zmiennych działanie jest niezdegenerowana na zbiorze gęstym $M_0 \subseteq M$.*

(BH) *X jest bihamiltonowskie i N ma rzeczywiste wartości własne λ_i takie, że $\mathrm{d}\lambda_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\lambda_n \neq 0$.*

Wówczas można napisać

$$H(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} H_i(\lambda_i)\,,$$

gdzie każde H_i zależy tylko od λ_i.

Stwierdzenie

Rozważmy jednorodny układ całkowalny (M, θ, F). *Niech* H *będzie* 1*-jednorodną funkcją Hamiltona, która spełnia warunek (ND). Jeżeli istnieje struktura Poissona* Λ_1, *która jest zgodna z* Λ_θ, *to ona nie może jednocześnie być* (–1)*-jednorodna i spełniać warunek (BH).*

Dowód.

- Jeśli N ma n niezależnych wartości własnych λ_i, to $H = \sum_i H_i(\lambda_i)$.
- Jeśli Λ_1 jest (–1)-jednorodna, to λ_i są 0-jednorodne, ponieważ θ jest 1-jednorodna.
- Stąd

$$H = \Delta(H) = \sum_{i=1}^{n} H_i'(\lambda_i)\Delta(\lambda_i) = 0\,.$$

□

Wniosek

Niech (M, α, H) *będzie układem hamiltonowskim kontaktowym. Jeśli istnieje struktura Jacobiego* (Λ, E)*, która jest zgodna z* α*, to odpowiedni tensor* N *na* $M \times \mathbb{R}_+$ *ma wartości własne* λ_i *takie, że* $\{\lambda_i, \lambda_j\}_\alpha = 0$*, ale*

$$\mathrm{d}\lambda_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\lambda_{n+1} = 0\,.$$

W szczególności $(M, \alpha, (\lambda_i))$ *nie spełnia warunków twierdzenia Liouville'a–Arnolda.*

- Rozważmy rozmaitość kontaktową (M, α).
- Do skonstruowania całkowalnego układu kontaktowego $F\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ nie można użyć zgodnych struktur Jacobiego.
- Natomiast możemy szukać struktury Poissona, która jest zgodna z symplektyzacją (M, α) i użyć twierdzenia Magriego.

Przykład

- Rozważmy układ hamiltonowski kontaktowy $(M = \mathbb{R}^3, \alpha, H)$, gdzie $\alpha = \mathrm{d}z - p\mathrm{d}q$ i $H = p - z$.
- Symplektyzacja to $(\mathbb{R}^4, \theta, H^{\mathrm{symp}})$, gdzie

$$\theta = r\mathrm{d}z - rp\mathrm{d}q\,, \quad H^{\mathrm{symp}} = rz - rp\,,$$

  i pole Liouville'a to $\Delta = r\partial_r$.
- Z zamiany współrzędnych

$$x^1 = q, \quad x^2 = z, \quad p_1 = -rp, \quad p_2 = r\,,$$

  wynika, że $\theta = p_i \mathrm{d}x^i$ i $H = p_1 + x^2 p_2$ –to układ poprzedniego przykładu.
- Zauważmy, że $\lambda_1 = p_1 = -rp$ i $\lambda_2 = p_2 x^2 = rz$ są 1-jednorodne.
- Zatem, ich rzuty definiują funkcje $\bar{\lambda}_1 = p$ i $\bar{\lambda}_2 = -z$ na M takie, że $\{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2\}_\alpha = 0$.

Podsumowanie

Podsumowanie

- Rozumiemy całkowalne układy kontaktowe jako jednorodne układy całkowalne.
- W ten sposób można naturalnie uogólnić twierdzenie Liouville'a–Arnolda, struktury bihamiltonowskie, itp.

Przyszłe badania

- Ciekawe przykłady całkowalnych układów kontaktowych
- Metoda obliczania zmiennych działanie-kąt
- Teoria perturbacji Kołmogorowa–Arnolda–Mosera (KAM)

Bibliografia

[1] V. I. Arnol'd. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1978.

[2] L. Colombo, M. de León, M. E. Eyrea Irazú i A. López-Gordón. „Homogeneous Bi-Hamiltonian Structures and Integrable Contact Systems". W: *Geometric Science of Information*. Red. F. Nielsen i F. Barbaresco. Springer Nature Switzerland: Cham, 2025.

[3] L. Colombo, M. de León, M. Lainz i A. López-Gordón. „Liouville–Arnold Theorem for Homogeneous Symplectic and Contact Hamiltonian Systems". *Geom. Mech.*, **02**(03) (2025).

[4] R. L. Fernandes. „Completely Integrable Bi-Hamiltonian Systems". *J. Dynam. Differential Equations*, **6**(1) (1994).

[5] E. Fiorani, G. Giachetta i G. Sardanashvily. „An Extension of the Liouville-Arnold Theorem for the Non-Compact Case". *Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis. B* (2003).

[6] A. López-Gordón. „The geometry of dissipation". Prac. dokt. Universidad Autónoma de Madrid, 2024. arXiv: 2409.11947.

Dziękuję serdecznie za uwagę!