Integrabilidad, caos y entrelazamiento en sistemas cuánticos

Estudio de la entropía de entrelazamiento en la cadena XX

Asier López Gordón

Departamento de Física Teórica
Supervisores: Federico Finkel Mongenstern y Artemio González-López

24 de julio de 2020

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Esquema del trabajo

1. Definición de la entropía de entrelazamiento S_L
2. Presentación del modelo XX
    - Equivalencia con un sistema de fermiones libres
    - Diagonalización del hamiltoniano
3. Matriz de correlación $\rightsquigarrow$ expresión exacta de S_L
4. Comportamiento asintótico de S_L
    - Relación con CFTs y criticalidad
    - Conjetura de Fisher-Hartwig $\rightsquigarrow$ S_L para $L \to \infty$
5. Conclusiones

La entropía como medida del grado de entrelazamiento

- Un sistema cuántico puede estar en un estado puro ρ y sus subsistemas en estados mezcla $\rho_i \rightarrow$ entrelazamiento
- Nos gustaría poder cuantificar cómo de entrelazadas están entre sí las partes de un sistema.
- El entrelazamiento aparece en múltiples áreas de la física actual:
  - Información cuántica y computación cuántica
  - Sistemas de muchos cuerpos
  - Agujeros negros y gravedad cuántica
- Entropía de $\rho_\alpha \equiv$ grado de entrelazamiento del sistema
  - $\rho_\alpha \equiv$ matriz dens. reducida $\equiv$ dist. de prob.
  - No es una entropía termodinámica.

Entropía de von Neumann

$$S[\rho] = -\operatorname{tr}(\rho \log \rho) \quad (k_B = 1)$$

Propiedades:

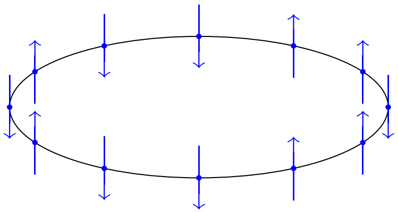
- $S[\rho] \geq 0$
- $S[\rho] = 0 \Leftrightarrow \rho$ estado puro
- $S\left[\bigotimes_{i=1}^{L} \rho_i\right] = \sum_{i=1}^{L} S[\rho_i]$
- $\rho_{A\cup B}$ estado puro $\Longrightarrow S_A = S_B$

Modelo XX

El modelo XX consiste en una cadena (1D) de N partículas de espín $1/2$ con interacciones a primeros vecinos en un campo magnético externo λ.

$$H_{\mathrm{XX}} = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{N-1}\left(\sigma_l^x\sigma_{l+1}^x + \sigma_l^y\sigma_{l+1}^y\right) + \frac{\lambda}{2}\sum_{l=0}^{N-1}\left(\sigma_l^z + 1\right) \quad (\hbar = 1)$$

- Supongamos $\lambda \geq 0$ ($\lambda < 0$ corresponde a $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |\downarrow\rangle$).
- Por simplicidad, tomamos CC periódicas: $0 \equiv N$.

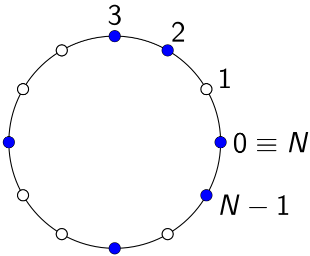


Sistema de fermiones libres

Transformación de Jordan-Wigner

$$a_l = \left(\prod_{m=0}^{l-1} \sigma_m^z\right)\sigma_l^-, \quad \sigma_l^\pm = \frac{\sigma_l^x \pm i\sigma_l^y}{2}$$

$$H_{\mathrm{XX}} = -\sum_{l=0}^{N-1}\left(a_l^\dagger a_{l+1} + h.c.\right) + \lambda \sum_{l=0}^{N-1} a_l^\dagger a_l$$



- $a_l^\dagger a_{l+1}$ corresponde al salto (*hopping*) de un fermión de $l+1$ a l.
- $a_l^\dagger a_l$ mide si l está ocupado o no.
- H_{XX} conserva el número de fermiones.

Diagonalización de H_{XX}

- H_{XX} tiene simetría traslacional: $[T, H_{\mathrm{XX}}] = 0$.

Transformada de Fourier

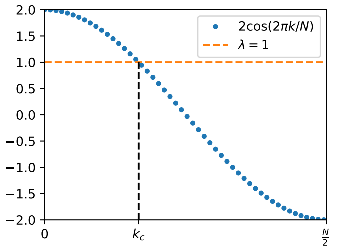
$$b_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} a_l e^{-i\frac{2\pi}{N}kl}, \qquad 0 \leq k \leq N-1$$

$$H_{\mathrm{XX}} = \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda_k b_k^\dagger b_k \equiv \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda_k n_k, \qquad \Lambda_k = \lambda - 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

- $b_k^\dagger$ actuando sobre $|0\cdots 0\rangle$ crea un fermión con momento $\frac{2\pi k}{N} \pmod{2\pi}$ y energía Λ_k.

Fases del sistema

Relación de dispersión



$$\Lambda_k = \lambda - 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$k_c = \left[\frac{N}{2\pi}\arccos\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right]$$

- Si $\lambda > 2,\ \Lambda_k > 0\ \forall\ k$
  - $|\mathrm{GS}\rangle = |0\cdots 0\rangle = |\downarrow\rangle \otimes \cdots \otimes |\downarrow\rangle \Rightarrow S_L = 0$
  - $E\left(|\mathrm{GS}\rangle\right) = 0$
- Si $0 \leq \lambda < 2$
  - $|\mathrm{GS}\rangle$ estado mezcla $\Rightarrow S_L \neq 0$
  - $E\left(|\mathrm{GS}\rangle\right) = \sum_{k=0}^{k_c} \Lambda_k + \sum_{N-k_c}^{N-1} \Lambda_k$
- En $\lambda = 2$ se produce la transición de fase crítica-ferromagnética.

Método de la matriz de correlación

- Queremos determinar S_L para un bloque de L espines adyacentes.

$$\left\langle b_p^\dagger b_q \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \text{ y } \Lambda_p < 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} , \quad \langle\ \rangle \equiv \langle\ \rangle_{|\mathrm{GS}\rangle}$$

$$A_{mn} \equiv \left\langle a_m^\dagger a_n \right\rangle = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{k_c} \cos\left[\frac{2\pi}{N} k(m-n)\right] - \frac{1}{N}, \quad 0 \leq m, n \leq L-1$$

- En el límite termodinámico $N \to \infty$

$$A_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_0^{p_c} \cos\left[p\ (m-n)\right]\ \mathrm{d}p = \frac{1}{\pi} \frac{\sin\left[p_c(m-n)\right]}{m-n}, \quad p_c = \arccos(\lambda/2)$$

Descorrelación ρ_L

- A partir de una cierta CL de $\left\{a_m, a_m^\dagger\right\}_{m=1}^{L}$ se pueden definir unos operadores $\left\{g_p, g_p^\dagger\right\}_{p=1}^{L}$ tales que en la base de operadores $\left\{g_p,\ g_p^\dagger,\ g_p^\dagger g_p,\ g_p g_p^\dagger\right\}$ la matriz densidad del bloque se escribe

$$\rho_L = \bigotimes_{p=1}^{L} \varrho_p, \quad \varrho_p = \begin{pmatrix} \nu_p & \\ & 1-\nu_p \end{pmatrix}, \quad \{\nu_p\}_{p=1}^{L} \text{ autovalores de } \mathbf{A}$$

Fórmula exacta para la entropía de entrelazamiento

Por la aditividad de la entropía de von Neumann, podemos escribir

$$S_L = \sum_{l=1}^{L} S[\rho_l] = \sum_{l=1}^{L} H_2(\nu_l), \quad H_2(x) = -x\log x - (1-x)\log(1-x)$$

$$\{\nu_l\}_{l=1}^{L} \text{ autovalores de } A_{mn} = \frac{1}{\pi}\frac{\sin\left[p_c(m-n)\right]}{m-n}, \quad p_c = \arccos(\lambda/2)$$

- Mediante esta técnica el problema de diagonalizar la matriz densidad ρ_L, de dimensión $2^L \times 2^L$, queda reducido al de diagonalizar $\mathbf{A}$ $(L \times L)$ (¡tiempo polinómico en lugar de exponencial!).
- Única particularidad del modelo: p_c (rel. de dispersión).

Comportamiento asintótico de la entropía de entrelazamiento

- La expresión exacta que hemos obtenido para S_L no proporciona directamente el comportamiento de S_L al crecer L con $L \to \infty$.
- Este comportamiento asintótico es crucial para determinar las propiedades críticas del sistema, así como su comportamiento bajo transformaciones del grupo conforme.
- Un sistema no-crítico tiene un *gap* $\Delta E \geq c > 0$ para $N \to \infty$, con c indep. de N.
- S_L satura para los sistemas no-críticos (*gapped*), mientras que presenta un crecimiento ilimitado para los sistemas críticos (*gapless*).

CFTs y comportamiento asintótico

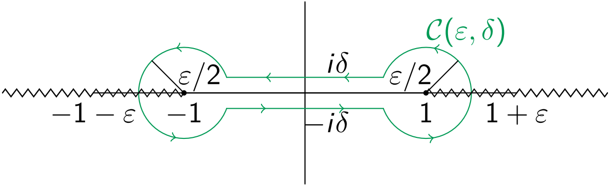
- Los sistemas sin *gap* no tienen una escala natural (que proporcionaría $\xi \equiv 1/\Delta E$), de modo que son invariantes bajo dilataciones.
- Si el hamiltoniano es invariante bajo el grupo conforme completo, el modelo es equivalente a una teoría de campo conforme (CFT) en el régimen de baja energía.
- La clase de universalidad de una CFT viene dada por su carga central c, que podemos determinar a partir de $\lim_{L\to\infty} S_L/\log L$.

Conjetura de Fisher-Hartwig y método de Jin y Korepin

- El comportamiento asintótico de S_L se puede determinar de forma analítica para la cadena XX.
- La matriz de correlación A_{mn} es una matriz de Toeplitz: depende de m y n únicamente a través de $m-n$.
- La conjetura de Fisher-Hartwig proporciona el comportamiento asintótico del determinante para matrices de Toeplitz que verifican ciertos requisitos.
- La matriz de Toeplitz que nos interesa es

$$\mathbf{T}_L = \mu - (2\mathbf{A} - \mathbb{1})\,, \qquad D_L(\mu) \equiv \det \mathbf{T}_L = \text{polinomio característico de } \mathbf{A}$$

Principio del argumento



$$S_L = \sum_{l=1}^{L} H_2(\nu_l) \overset{?}{\sim} \oint_{\mathcal{C}(\varepsilon,\delta)} H_2(\mu)\ \mathrm{d}\log D_L(\mu) \sim \cancel{\oint_{\mathcal{C}(\varepsilon,\delta)} H_2(\mu)\ \mathrm{d}\log D_L(\mu)},$$

$$H_2(\mu) \to e(x,\tilde{\nu}) = -\frac{x+\tilde{\nu}}{\;}\log\left(\frac{x+\tilde{\nu}}{\;}\right) - \frac{x-\tilde{\nu}}{\;}\log\left(\frac{x-\tilde{\nu}}{\;}\right)$$

Fórmula asintótica para S_L

Reemplazando $D_L(\mu)$ por su expresión asintótica, proporcionada por la conjetura de Fisher-Hartwig, y desarrollando las integrales finalmente obtenemos

$$S_L \simeq \frac{1}{3}\log L + \frac{1}{3}\log\left(2\sin p_c\right) + \Upsilon_1, \quad L \to \infty$$

$$\Upsilon_1 = \int_0^\infty \left[-\frac{e^{-t}}{3t} - \frac{1}{t\sinh^2(t/2)} + \frac{\cosh(t/2)}{2\sinh^3(t/2)}\right] \mathrm{d}t \simeq 0.495018$$

S_L escala como $\frac{1}{3}\log L$, corresp. a una CFT con $c = 1$ (bosón libre).

Fórmula asintótica vs. valores exactos

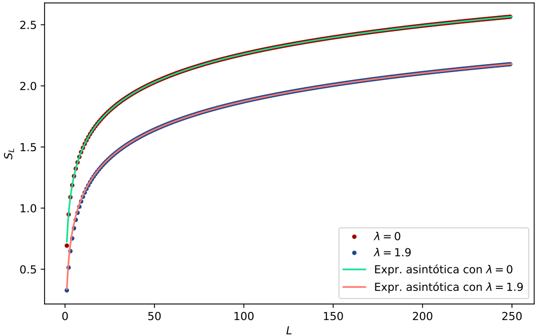


Figura: Valor exacto de S_L para un bloque de L espines de la cadena XX en $|\mathrm{GS}\rangle$ y ajuste a la fórmula asintótica. La máxima entropía se da para $\lambda = 0$, conforme λ aumenta S_L disminuye, hasta que en $\lambda = 2$ S_L satura en 0, se produce la transición de fase y $|\mathrm{GS}\rangle$ pasa a ser un estado producto.

Conclusiones

1. La entropía de entrelazamiento permite cuantificar el grado de entrelazamiento en un cierto estado de un sistema cuántico.
2. La cadena XX, formada por espines $\frac{1}{2}$ que interaccionan entre sí y con un campo magnético externo, es equivalente a un sistema de fermiones libres mediante una transf. de Jordan-Wigner.
3. Conocida la relación de dispersión Λ_k del modelo ($\Rightarrow$ conocido p_c) es posible escribir su matriz de correlación en el LT y, a partir de esta, el valor exacto de S_L.
4. El crecimiento logarítmico de S_L para $L \to \infty$ se relaciona estrechamente con la criticalidad del modelo y su equivalencia con CFTs.
5. Si A_{mn} es una matriz de Toeplitz, el comportamiento asintótico de S_L para $L \to \infty$ se puede determinar de forma analítica.

Problemas abiertos

1. Si A_{mn} no es Toeplitz (o no un caso probado de la conjetura de F-H), es complicado determinar S_L para $L \to \infty$. Para algunos modelos se puede aprovechar su equivalencia con una CFT.
2. El comportamiento asintótico de S_L para estados térmicos del modelo XX se ha estimado numéricamente y mediante CFTs.
3. La búsqueda de expresiones exactas para S_L (en $D \geq 1$) es un campo abierto de investigación.
4. Estos resultados podrían proporcionar soluciones a problemas relacionados con el entrelazamiento cuántico en computación cuántica, sistemas de muchos cuerpos o física de altas energías.

FIN

¡Gracias por su atención!