Derivadas

Asier López Gordón
Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT), CSIC
✉ asier.lopez@icmat.es
🌐 www.alopezgordon.xyz/teaching

9 de septiembre de 2022

1. Motivación

Supongamos que queremos estudiar como una cierta función $f(x)$ cambia al cambiar el parámetro x. Por ejemplo, si un ascensor se encuentra a una altura $x(t)$ en el tiempo t, nos gustaría saber cómo de rápido se mueve. Para ello calculamos su velocidad entre el tiempo t y el tiempo $t+h$, esto es, la distancia que ha recorrido entre esos dos puntos dividida por el lapso de tiempo trascurrido:

$$v \simeq \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

Esta es una velocidad promedio, para conocer la velocidad en un tiempo concreto deberíamos tomar h arbitrariamente pequeño, es decir, tomar el límite:

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

En general, la derivada de una función $f(x)$ en el punto x se define como

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Las notaciones $f'(x)$ y $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ se conocen como notación de Newton y de Leibniz, respectivamente.

2. Propiedades

Sean f, g dos funciones cualesquiera. La derivada tiene las propiedades siguientes:

- Linealidad
$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x),$$
para cualesquiera números $a, b \in \mathbb{R}$.

- Regla de Leibniz (o regla del producto)
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

- Regla de la cadena
$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

3. Funciones habituales

Las reglas de derivación más importantes que memorizar son las que siguen:

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
x^r	nx^{r-1}
e^{ax}	ae^{ax}
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

con $a, r \in \mathbb{R}$.

Combinándolas con las propiedades mencionadas más arriba, uno puede obtener fácilmente otras derivadas habituales. Otras tablas de derivadas incluyen además las reglas

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2},$$

y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

En realidad, no hace falta sabérselas. La primera no es más que la regla de la cadena aplicada a la función $g \circ f(x)$, con $g(x) = \frac{1}{x}$, mientras que la segunda es la regla del producto aplicada a $f \cdot h$, con $h(x) = \frac{1}{g(x)}$.

Otra propiedad que conviene saberse es:

$$\boxed{y^x = e^{x \ln y}}.$$

A partir de la misma podemos obtener

$$\frac{\mathrm{d}(y^x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(e^{x \ln y})}{\mathrm{d}x} = \ln y\ e^{x \ln y} + x\ e^{x \ln y}\frac{\mathrm{d}\ln y}{\mathrm{d}x} = \ln y\ y^x + x\ y^x\frac{1}{y'}.$$

Por ejemplo,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = \ln a\ a^x,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^x) = \ln x x^x + x^{x+1}.$$